

\$SPAD/input schaum11.input

Timothy Daly

June 15, 2008

## Contents

1	[1]:14.237	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	3
2	[1]:14.238	$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	6
3	[1]:14.239	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	7
4	[1]:14.240	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	11
5	[1]:14.241	$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$	12
6	[1]:14.242	$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}$	14
7	[1]:14.243	$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2 - x^2}}$	15
8	[1]:14.244	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$	18
9	[1]:14.245	$\int x\sqrt{a^2 - x^2} dx$	22
10	[1]:14.246	$\int x^2\sqrt{a^2 - x^2} dx$	23
11	[1]:14.247	$\int x^3\sqrt{a^2 - x^2} dx$	27
12	[1]:14.248	$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx$	28
13	[1]:14.249	$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$	30
14	[1]:14.250	$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^3} dx$	33
15	[1]:14.251	$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$	35

16 [1]:14.252	$\int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$	36
17 [1]:14.253	$\int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$	37
18 [1]:14.254	$\int \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$	40
19 [1]:14.255	$\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^{3/2}}$	41
20 [1]:14.256	$\int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)^{3/2}}$	43
21 [1]:14.257	$\int \frac{dx}{x^3(a^2 - x^2)^{3/2}}$	44
22 [1]:14.258	$\int (a^2 - x^2)^{3/2} dx$	47
23 [1]:14.259	$\int x(a^2 - x^2)^{3/2} dx$	51
24 [1]:14.260	$\int x^2(a^2 - x^2)^{3/2} dx$	52
25 [1]:14.261	$\int x^3(a^2 - x^2)^{3/2} dx$	56
26 [1]:14.262	$\int \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{x} dx$	58
27 [1]:14.263	$\int \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{x^2} dx$	60
28 [1]:14.264	$\int \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{x^3} dx$	64

1 [1]:14.237  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 - x^2})$$

```

(*)≡
)spool schaum11.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(1/(sqrt(a^2-x^2)),x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          |  2    2
--R          \|- x  + a  - a
--R (1)  - 2atan(-----)
--R                      x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=asin(x/a)
--R
--R          x
--R (2)  asin(-)
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3
cc:=aa-bb
--R
--R          +-----+
--R          |  2    2
--R          \|- x  + a  - a
--R (3)  - 2atan(-----) - asin(-)
--R                      x          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 4
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))

```

```

--R
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R                    2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 5
dd:=atanrule cc
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R      - \|- x + a + %i x + a      x
--R (5) %i log(-----) - asin(-)
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a + %i x - a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 6
asinrule:=rule(asin(x) == %i*log(-%i*x+sqrt(1-x^2)))
--R
--R          +-----+
--R          | 2
--R (6) asin(x) == %i log(\|- x + 1 - %i x)
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 7
ee:=asinrule dd
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a
--R      a |----- - %i x
--R          | 2
--R          \|- x + a
--R (7) - %i log(-----) + %i log(-----)
--R          a
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a + %i x + a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 8
ff:=rootSimp ee
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          %i\|x  - a  - %i x
--R (8)  - %i log(-----) + %i log(-----)
--R          a
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          - \|x  - a  + x - %i a
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          \|x  - a  + x + %i a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 9      14:238 Schaums and Axiom agree
gg:=complexNormalize ff
--R
--R (9)  0
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

2 [1]:14.238  $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 10
aa:=integrate(x/(sqrt(a^2-x^2)),x)
--R
--R
--R          2
--R         x
--R (1)  -----
--R      +-----+
--R      |  2    2
--R     \|- x  + a  - a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 11
bb:=-sqrt(a^2-x^2)
--R
--R      +-----+
--R      |  2    2
--R (2)  - \|- x  + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 12      14:238 Schaums and Axiom differ by a constant
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

**3 [1]:14.239**  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 - x^2})$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 13
```

```
aa:=integrate(x^2/sqrt(a^2-x^2),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1)
```

```
--R
```

$$\frac{(-4a^3 \sqrt{-x^2 + a^2} - 2a^2 x^2 + 4a^4) \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} - a}{x}\right) + (-x^3 + 2a^2 x) \sqrt{-x^2 + a^2} + 2a^3 x^2 - 2a^3 x}{4a \sqrt{-x^2 + a^2} + 2x^2 - 4a^2}$$

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R /
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 14
```

```
bb:=(x*sqrt(a^2-x^2))/2+a^2/2*asin(x/a)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (2)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 15
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R
```

```
-----+
```



```

--R
--R      | 2 2
--R      2  \|- x + a - a 2 x
--R      - 2a atan(-----) - a asin(-)
--R      x a
--R (3) -----
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 16
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R      - x + %i
--R      %i log(-----)
--R      x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R      2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 17
dd:=atanrule cc
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      2  - \|- x + a + %i x + a 2 x
--R      %i a log(-----) - a asin(-)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- x + a + %i x - a
--R (5) -----
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 18
asinrule:=rule(asin(x) == %i*log(-%i*x+sqrt(1-x^2)))
--R
--R      +-----+
--R      | 2
--R (6) asin(x) == %i log(\|- x + 1 - %i x)
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 19
ee:=asinrule dd

```

```

--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          |- x + a
--R          a |----- - %i x
--R          | 2
--R          \| a
--R          2
--R          - %i a log(-----) + %i a log(-----)
--R          a
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          - \|- x + a + %i x + a
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a + %i x - a
--R
--R (7) -----
--R
--R          2
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 20
ff:=expandLog ee
--R
--R (8)
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          |- x + a
--R          2
--R          - %i a log(a |----- - %i x) - %i a log(\|- x + a + %i x - a)
--R          | 2
--R          \| a
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a - %i x - a) + %i a log(a) + %i a log(- 1)
--R
--R /
--R
--R          2
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 21
gg:=rootSimp ff
--R
--R (9)
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a + %i x - a) - %i a log(%i\|x - a - %i x)
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a - %i x - a) + %i a log(a) + %i a log(- 1)
--R

```

```

--R /
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

--S 22      14:239 Schaums and Axiom agree
hh:=complexNormalize gg
--R
--R      (10)  0
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

4 [1]:14.240

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3} + a^2 \sqrt{a^2 - x^2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 23
aa:=integrate(x^3/sqrt(a^2-x^2),x)
--R
--R
--R
--R              +-----+
--R              4 | 2 2 6 2 4
--R          3a x \|- x + a + x - 3a x
--R (1) -----
--R              +-----+
--R              2 2 | 2 2 2 3
--R          (3x - 12a )\|- x + a - 9a x + 12a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 24
bb:=(a^2-x^2)^(3/2)/3-a^2*sqrt(a^2-x^2)
--R
--R
--R              +-----+
--R              2 2 | 2 2
--R          (- x - 2a )\|- x + a
--R (2) -----
--R              3
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 25      14:240 Schaums and Axiom differ by a constant
cc:=aa-bb
--R
--R
--R              3
--R              2a
--R (3)  - ----
--R              3
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

5 [1]:14.241  $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 26
aa:=integrate(1/(x*sqrt(a^2-x^2)),x)
```

```
--R
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- x + a - a
--R      log(-----)
--R              x
--R (1) -----
--R              a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 27
bb:=-1/a*log((a+sqrt(a^2-x^2))/x)
```

```
--R
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- x + a + a
--R      log(-----)
--R              x
--R (2) - -----
--R              a
```

Type: Expression Integer

```
--S 28
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2 2      | 2 2
--R      \|- x + a + a      \|- x + a - a
--R      log(-----) + log(-----)
--R              x              x
--R (3) -----
--R              a
```

--R Type: Expression Integer  
 --E

--S 29  
 dd:=expandLog cc

--R  
 --R  
 --R

$$(4) \frac{\log(\sqrt{-x^2 + a^2} + a) + \log(\sqrt{-x^2 + a^2} - a) - 2\log(x)}{a}$$

--R  
 --R Type: Expression Integer  
 --E

--S 30  
 ee:=complexNormalize dd

--R  
 --R

$$(5) \frac{2\log\left(\frac{x}{\sqrt{-x^2 + a^2}}\right)}{a}$$

--R  
 --R Type: Expression Integer  
 --E

--S 31 14:241 Schaums and Axiom differ by a constant  
 ff:=rootSimp ee

--R  
 --R

$$(6) \frac{2\log(\sqrt{-1})}{a}$$

--R  
 --R Type: Expression Integer  
 --E

6 [1]:14.242  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 32
aa:=integrate(1/(x^2*sqrt(a^2-x^2)),x)
```

```
--R
--R
--R          +-----+
--R          |  2  2  2  2
--R      a\|- x  + a  + x  - a
--R (1) -----
--R          +-----+
--R          2 |  2  2  3
--R      a x\|- x  + a  - a x
--R
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 33
bb:=-sqrt(a^2-x^2)/(a^2*x)
```

```
--R
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R      \|- x  + a
--R (2) - -----
--R          2
--R          a x
--R
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 34 14:242 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R (3) 0
--R
--E
```

Type: Expression Integer

7 [1]:14.243  $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{a^2 - x^2}}$

$$\int \frac{1}{x^3 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^3} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

(\*)+=  
)clear all

--S 35

aa:=integrate(1/(x^3\*sqrt(a^2-x^2)),x)

--R

--R

--R (1)

$$\frac{(2ax \sqrt{-x^2 + a^2} + x^4 - 2a^2 x) \log\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} - a}{x}\right) + (-ax^2 + 2a^3) \sqrt{-x^2 + a^2} + 2a^2 x^2 - 2a^4}{4a^2 x \sqrt{-x^2 + a^2} + 2a^3 x^4 - 4a^5 x}$$

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 36

bb:=-sqrt(a^2-x^2)/(2\*a^2\*x^2)-1/(2\*a^3)\*log((a+sqrt(a^2-x^2))/x)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

Type: Expression Integer

--S 37

cc:=aa-bb



```

--R
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2 2          | 2 2
--R          \|- x + a + a  \|- x + a - a
--R          log(-----) + log(-----)
--R                   x                   x
--R (3) -----
--R                               3
--R                              2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 38
dd:=expandLog cc
--R
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2 2          | 2 2
--R          log(\|- x + a + a) + log(\|- x + a - a) - 2log(x)
--R (4) -----
--R                               3
--R                              2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 39
ee:=complexNormalize dd
--R
--R          x
--R          log(-----)
--R          +-----+
--R          | 2
--R          \|- x
--R (5) - -----
--R          3
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 40 14:243 Schaums and Axiom differ by a constant

```

ff:=rootSimp ee
--R
--R          +----+
--R          log(\|- 1 )
--R (6) -----
--R          3
--R          a

```

--R  
--E

Type: Expression Integer

8 [1]:14.244  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 - x^2})$$

(\*)+=  
)clear all

--S 41

aa:=integrate(sqrt(a^2-x^2),x)

--R

--R

--R (1)

$$\frac{(-4a^3 \sqrt{-x^2 + a^2} - 2a^2 x^2 + 4a^4) \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} - a}{x}\right) + (x^3 - 2ax^2) \sqrt{-x^2 + a^2} - 2a^3 x^2 + 2a^3 x}{4a \sqrt{-x^2 + a^2} + 2x^2 - 4a}$$

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 42

bb:=(x\*sqrt(a^2-x^2))/2+a^2/2\*asin(x/a)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

Type: Expression Integer

--S 43

cc:=aa-bb

--R

--R

--R

$$\frac{\sqrt{-x^2 + a^2}}{2}$$

```

--R      2      \|- x + a - a      2      x
--R      - 2a atan(-----) - a asin(-)
--R                                 x                                 a
--R (3) -----
--R                                 2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 44
asinrule:=rule(asin(x) == %i*log(-%i*x+sqrt(1-x^2)))
--R
--R      +-----+
--R      |  2
--R (4) asin(x) == %i log(\|- x + 1 - %i x)
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 45
dd:=asinrule cc
--R
--R      +-----+
--R      |  2  2
--R      \|- x + a
--R      a |----- - %i x
--R      |  2
--R      2      \| a
--R      - %i a log(-----) - 2a atan(-----)
--R                                 a                                 x
--R (5) -----
--R                                 2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 46
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R      - x + %i
--R      %i log(-----)
--R      x + %i
--R (6) atan(x) == - -----
--R                                 2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 47
ee:=atanrule dd

```

```

--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          |- x + a
--R          a |----- - %i x
--R          | 2
--R          \| a
--R          2
--R          - %i a log(-----) + %i a log(-----)
--R          a
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          - \|- x + a + %i x + a
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a + %i x - a
--R
--R (7) -----
--R
--R          2
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 48
ff:=expandLog ee
--R
--R (8)
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          |- x + a
--R          2
--R          - %i a log(a |----- - %i x) - %i a log(\|- x + a + %i x - a)
--R          | 2
--R          \| a
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a - %i x - a) + %i a log(a) + %i a log(- 1)
--R
--R /
--R
--R          2
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 49
gg:=rootSimp ff
--R
--R (9)
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          2
--R          - %i a log(%i\|x - a + %i x - a) - %i a log(%i\|x - a - %i x)
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          2
--R          %i a log(%i\|x - a - %i x - a) + %i a log(a) + %i a log(- 1)
--R

```

```
--R /
--R      2
--R                                         Type: Expression Complex Integer
--E

--S 50      14:244 Schaums and Axiom agree
hh:=complexNormalize gg
--R
--R      (10)  0
--R                                         Type: Expression Complex Integer
--E
```



10 [1]:14.246  $\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x(a^2 - x^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2 x \sqrt{a^2 - x^2}}{8} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{a^2 - x^2})$$

(\*)+≡  
)clear all

--S 54

aa:=integrate(x^2\*sqrt(a^2-x^2),x)

--R

--R

--R (1)

$$\begin{aligned} & \frac{((-8ax^5 + 16a^7)\sqrt{-x^2 + a^2} - 2a^4x^4 + 16a^6x^2 - 16a^8) \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} - a}{x}\right) + (2x^7 - 17a^2x^5 + 24a^4x^3 - 8a^6x)\sqrt{-x^2 + a^2} - 8a^7x^7 + 28a^3x^5 - 28a^5x^3 + 8a^7x}{(32a^2x^2 - 64a^3)\sqrt{-x^2 + a^2} + 8x^4 - 64a^2x^2 + 64a^4} \end{aligned}$$

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 55

bb:=-((x\*(a^2-x^2)^(3/2))/4+(a^2\*x\*sqrt(a^2-x^2))/8+a^4/8\*asin(x/a))

--R

--R

$$(2) \frac{(2x^3 - ax^2)\sqrt{-x^2 + a^2} + a^4 \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}\right)}{8}$$

Type: Expression Integer

--E

--S 56



```

cc:=aa-bb
--R
--R
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R      4    \|- x  + a  - a      4    x
--R      - 2a atan(-----) - a asin(-)
--R                      x                      a
--R (3) -----
--R                      8
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 57
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R                      2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 58
dd:=atanrule cc
--R
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R      4    - \|- x  + a  + %i x + a      4    x
--R      %i a log(-----) - a asin(-)
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          \|- x  + a  + %i x - a
--R (5) -----
--R                      8
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 59
asinrule:=rule(asin(x) == %i*log(-%i*x+sqrt(1-x^2)))
--R
--R          +-----+
--R          |  2
--R (6) asin(x) == %i log(\|- x  + 1  - %i x)
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 60
ee:=asinrule dd
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          |- x + a
--R          a |----- - %i x
--R          | 2
--R          \| a
--R          4
--R          - %i a log(-----) + %i a log(-----)
--R          a
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          - \|- x + a + %i x + a
--R          4
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a + %i x - a
--R
--R (7) -----
--R
--R          8
--R
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 61
ff:=expandLog ee
--R
--R
--R (8)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          |- x + a
--R          4
--R          - %i a log(a |----- - %i x) - %i a log(\|- x + a + %i x - a)
--R          | 2
--R          \| a
--R
--R +
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a - %i x - a) + %i a log(a) + %i a log(- 1)
--R          4
--R          4
--R
--R /
--R
--R          8
--R
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 62
gg:=rootSimp ff
--R
--R
--R (9)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          - %i a log(%i\|x - a + %i x - a) - %i a log(%i\|x - a - %i x)
--R          4
--R
--R +

```

```

--R          +-----+
--R          4      | 2  2      4      4
--R      %i a log(%i\|x  - a  - %i x - a) + %i a log(a) + %i a log(- 1)
--R /
--R      8
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 63      14:246 Schaums and Axiom agree
hh:=complexNormalize gg
--R
--R      (10)  0
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

11 [1]:14.247  $\int x^3 \sqrt{a^2 - x^2} dx$

$$\int x^3 \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{(a^2 - x^2)^{5/2}}{5} + \frac{a^2(a^2 - x^2)^{3/2}}{3}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 64
aa:=integrate(x^3*sqrt(a^2-x^2),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R      +-----+
--R      8      3 6      5 4 | 2 2      10      2 8      4 6      6 4
--R      (- 15a x + 65a x - 60a x )\|- x + a - 3x + 40a x - 95a x + 60a x
--R      -----
--R      +-----+
--R      4      2 2      4 | 2 2      4      3 2      5
--R      (15x - 180a x + 240a )\|- x + a - 75a x + 300a x - 240a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 65
bb:=(a^2-x^2)^(5/2)/5-(a^2*(a^2-x^2)^(3/2))/3
--R
--R
--R      +-----+
--R      4      2 2      4 | 2 2
--R      (3x - a x - 2a )\|- x + a
--R (2) -----
--R
--R                                          15
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 66      14:247 Schaums and Axiom differ by a constant
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      5
--R      2a
--R (3) - ----
--R      15
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

12 [1]:14.248  $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \sqrt{a^2 - x^2} - a \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 67
```

```
aa:=integrate(sqrt(a^2-x^2)/x,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

```
--S 68
```

```
bb:=sqrt(a^2-x^2)-a*log((a+sqrt(a^2-x^2))/x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

```
--S 69
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

Type: Expression Integer

Type: Expression Integer

```

--S 70
dd:=expandLog cc
--R
--R
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R (4)  a log(\|- x  + a  + a) + a log(\|- x  + a  - a) - 2a log(x) + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 71
ee:=complexNormalize dd
--R
--R
--R          x
--R (5)  - 2a log(-----) + a
--R          +-----+
--R          |  2
--R          \|- x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 72      14:248 Schaums and Axiom differ by a constant
ff:=rootSimp ee
--R
--R
--R          +----+
--R (6)  2a log(\|- 1 ) + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

**13 [1]:14.249**  $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{a^2 - x^2})$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 73
```

```
aa:=integrate(sqrt(a^2-x^2)/x^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1)
```

$$\frac{(2x\sqrt{-x^2 + a^2} - 2ax)\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} - a}{x}\right) + a\sqrt{-x^2 + a^2} + x^2 - a^2}{x^2}$$

```
-----
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

$$x\sqrt{-x^2 + a^2} - a^2$$

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 74
```

```
bb:=-sqrt(a^2-x^2)/x-asin(x/a)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (2)
```

$$\frac{-\sqrt{-x^2 + a^2} - x \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}\right)}{x}$$

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 75
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (3)
```

$$2\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} - a}{x}\right) + \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}\right)$$

```
--R
```

--R Type: Expression Integer  
--E

--S 76  
asinrule:=rule(asin(x) == %i\*log(-%i\*x+sqrt(1-x^2)))

--R  
--R +-----+  
--R | 2  
--R (4) asin(x) == %i log(\|- x + 1 - %i x)  
--R Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)  
--E

--S 77  
dd:=asinrule cc

--R  
--R +-----+  
--R | 2 2  
--R \|- x + a  
--R a |----- - %i x +-----+  
--R | 2 2  
--R \|- x + a - a  
--R (5) %i log(-----) + 2atan(-----)  
--R a x  
--R Type: Expression Complex Integer  
--E

--S 78  
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2\*log((1+%i\*x)/(1-%i\*x)))

--R  
--R - x + %i  
--R %i log(-----)  
--R x + %i  
--R (6) atan(x) == - -----  
--R 2  
--R Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)  
--E

--S 79  
ee:=atanrule dd

--R  
--R +-----+  
--R | 2 2  
--R \|- x + a  
--R a |----- - %i x +-----+  
--R | 2 2  
--R \|- x + a + %i x + a



```

--R (7) %i log(-----) - %i log(-----)
--R          a          +-----+
--R                    | 2 2
--R                   \|- x + a + %i x - a
--R                                     Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 80
ff:=expandLog ee

```

```

--R (8)
--R          +-----+
--R          | 2 2          +-----+
--R          \|- x + a - %i x + %i log(\|- x + a + %i x - a)
--R          | 2
--R          \| a
--R +
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a - %i x - a - %i log(a) - %i log(- 1)
--R                                               Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 81
gg:=rootSimp ff

```

```

--R (9)
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2 2          | 2 2
--R          %i log(%i\|x - a + %i x - a) + %i log(%i\|x - a - %i x)
--R +
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          - %i log(%i\|x - a - %i x - a) - %i log(a) - %i log(- 1)
--R                                               Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 82      14:249 Schaums and Axiom agree
hh:=complexNormalize gg

```

```

--R (10) 0
--R
--R                                     Type: Expression Complex Integer
--E

```

14 [1]:14.250  $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^3} dx$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^3} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 83
```

```
aa:=integrate(sqrt(a^2-x^2)/x^3,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1)
```

```
--R
```

$$\frac{(-2ax\sqrt{-x^2+a^2} - x^4 + 2a^2x)\log\left(\frac{\sqrt{-x^2+a^2} - a}{x}\right) + (-ax^3 + 2a^2)\sqrt{-x^2+a^2} + 2a^2x^2 - 2a^4}{4a^2x\sqrt{-x^2+a^2} + 2a^4x^2 - 4a^3x}$$

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 84
```

```
bb:=-sqrt(a^2-x^2)/(2*x^2)+1/(2*a)*log((a+sqrt(a^2-x^2))/x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 85
```

```
cc:=aa-bb
```

```

--R
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2 2          | 2 2
--R          \|- x + a + a  \|- x + a - a
--R      - log(-----) - log(-----)
--R                    x                    x
--R (3) -----
--R                    2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 86
dd:=expandLog cc
--R
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2 2          | 2 2
--R      - log(\|- x + a + a) - log(\|- x + a - a) + 2log(x)
--R (4) -----
--R                    2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 87
ee:=complexNormalize dd
--R
--R          x
--R      log(-----)
--R          +----+
--R          | 2
--R          \|- x
--R (5) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 88      14:250 Schaums and Axiom differ by a constant
ff:=rootSimp ee
--R
--R          +----+
--R      log(\|- 1 )
--R (6) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

15 [1]:14.251  $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 89
aa:=integrate(1/(a^2-x^2)^(3/2),x)
```

```
--R
--R
--R          +-----+
--R          |  2    2
--R      - x\|- x  + a  + a x
--R (1)  -----
--R          +-----+
--R      3 |  2    2    2 2    4
--R      a \|- x  + a  + a x  - a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 90
bb:=x/(a^2*sqrt(a^2-x^2))
```

```
--R
--R
--R          x
--R (2)  -----
--R          +-----+
--R      2 |  2    2
--R      a \|- x  + a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 91 14:251 Schaums and Axiom agree
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R (3) 0
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

16 [1]:14.252  $\int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{x}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 92
aa:=integrate(x/(a^2-x^2)^(3/2),x)
```

```
--R
--R
--R          2
--R         x
--R (1)  -----
--R      +-----+
--R      2 |  2  2      2  3
--R      a \|- x  + a  + a x  - a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 93
bb:=1/sqrt(a^2-x^2)
```

```
--R
--R
--R          1
--R (2)  -----
--R      +-----+
--R      |  2  2
--R      \|- x  + a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 94 14:252 Schaums and Axiom differ by a constant
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R
--R          1
--R (3)  -
--R          a
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

17 [1]:14.253  $\int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \ln(x + \sqrt{a^2 - x^2})$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 95
aa:=integrate(x^2/(a^2-x^2)^(3/2),x)
```

```
--R
--R
--R (1)
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2      2 2      \|- x + a  - a      +-----+
--R (2a\|- x + a  + 2x  - 2a )atan(-----) - x\|- x + a  + a x
--R                                  x
--R -----
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2      2 2
--R a\|- x + a  + x  - a
--R
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 96
bb:=x/sqrt(a^2-x^2)-asin(x/a)
```

```
--R
--R
--R      +-----+
--R      x | 2 2
--R - asin(-)\|- x + a  + x
--R      a
--R (2) -----
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R \|- x + a
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 97
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R \|- x + a  - a      x
```

```

--R (3) 2atan(-----) + asin(-)
--R x a
--R
--R Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 98
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R                    2
--R
--R Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 99
dd:=atanrule cc
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R      - \|- x + a + %i x + a x
--R (5) - %i log(-----) + asin(-)
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a + %i x - a
--R
--R Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 100
asinrule:=rule(asin(x) == %i*log(-%i*x+sqrt(1-x^2)))
--R
--R          +-----+
--R          | 2
--R (6) asin(x) == %i log(\|- x + 1 - %i x)
--R
--R Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 101
ee:=asinrule dd
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a
--R      a |----- - %i x
--R          | 2
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2

```

```

--R          \|      a          - \|- x  + a  + %i x + a
--R (7) %i log(-----) - %i log(-----)
--R          a          +-----+
--R          | 2 2          \|- x  + a  + %i x - a
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```

--S 102

ff:=expandLog ee

```

--R (8)
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2 2          | 2 2
--R %i log(a |----- - %i x) + %i log(\|- x  + a  + %i x - a)
--R          | 2          \|- x  + a
--R +
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R - %i log(\|- x  + a  - %i x - a) - %i log(a) - %i log(- 1)
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```

--S 103

gg:=rootSimp ff

```

--R (9)
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2 2          | 2 2
--R %i log(%i\|x  - a  + %i x - a) + %i log(%i\|x  - a  - %i x)
--R +
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R - %i log(%i\|x  - a  - %i x - a) - %i log(a) - %i log(- 1)
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```

--S 104 14:253 Schaums and Axiom agree

hh:=complexNormalize gg

```

--R (10) 0
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```



18 [1]:14.254  $\int \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{x^3}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 105
aa:=integrate(x^3/(a^2-x^2)^(3/2),x)
```

```
--R
--R
--R
--R              4
--R             x
--R (1)  -----
--R              +-----+
--R             2 2 | 2 2 - 2a x + 2a
--R          (x - 2a )\|- x + a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 106
bb:=sqrt(a^2-x^2)+a^2/sqrt(a^2-x^2)
```

```
--R
--R              2 2
--R             - x + 2a
--R (2)  -----
--R             +-----+
--R            | 2 2
--R           \|- x + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 107 14:254 Schaums and Axiom differ by a constant
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R (3)  2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

19 [1]:14.255  $\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{1}{x(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{-1}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{a^3} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 108
```

```
aa:=integrate(1/(x*(a^2-x^2)^(3/2)),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

```
--S 109
```

```
bb:=1/(a^2*sqrt(a^2-x^2))-1/a^3*log((a+sqrt(a^2-x^2))/x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

```
--S 110
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

```

--R      log(-----) + log(-----) + 1
--R      x              x
--R (3) -----
--R              3
--R             a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 111
dd:=expandLog cc
--R
--R      +-----+      +-----+
--R      |  2  2      |  2  2
--R      log(\|- x + a + a) + log(\|- x + a - a) - 2log(x) + 1
--R (4) -----
--R              3
--R             a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 112
ee:=complexNormalize dd
--R
--R      x
--R      - 2log(-----) + 1
--R      +-----+
--R      |  2
--R      \|- x
--R (5) -----
--R      3
--R     a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 113    14:255 Schaums and Axiom differ by a constant
ff:=rootSimp ee
--R
--R      +----+
--R      2log(\|- 1 ) + 1
--R (6) -----
--R      3
--R     a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

20 [1]:14.256  $\int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{1}{x^2(a^2 - x^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^4 x} - \frac{x}{a^4 \sqrt{a^2 - x^2}}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 114
aa:=integrate(1/(x^2*(a^2-x^2)^(3/2)),x)
--R 
--R 
--R               +-----+
--R            2   3 | 2   2   4   2 2   4
--R      (4a x  - 2a )\|- x  + a  + 2x  - 5a x  + 2a
--R  (1) -----
--R               +-----+
--R            4 3   6 | 2   2   5 3   7
--R      (a x  - 2a x)\|- x  + a  - 2a x  + 2a x
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 115
bb:=-sqrt(a^2-x^2)/(a^4*x)+x/(a^4*sqrt(a^2-x^2))
--R 
--R            2   2
--R          2x  - a
--R  (2) -----
--R          +-----+
--R         4 | 2   2
--R       a x\|- x  + a
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 116   14:256 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R 
--R  (3)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

21 [1]:14.257  $\int \frac{dx}{x^3(a^2 - x^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{1}{x^3(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{3}{2a^5} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 117
aa:=integrate(1/(x^3*(a^2-x^2)^(3/2)),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R      4      3 2 | 2      2      6      2 4      4 2
--R      ((9a x  - 12a x )\|- x  + a  + 3x  - 15a x  + 12a x )
--R      *
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R          \|- x  + a  - a
--R      log(-----)
--R              x
--R      +
--R          +-----+
--R      4      3 2      5 | 2      2      6      2 4      4 2      6
--R      (3a x  + 5a x  - 4a )\|- x  + a  + 2x  - a x  - 7a x  + 4a
--R      /
--R          +-----+
--R      6 4      8 2 | 2      2      5 6      7 4      9 2
--R      (6a x  - 8a x )\|- x  + a  + 2a x  - 10a x  + 8a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 118
bb:=-1/(2*a^2*x^2*sqrt(a^2-x^2))+3/(2*a^4*sqrt(a^2-x^2))-3/(2*a^5)*log((a+sqrt(a^2-x^2)
--R
--R          +-----+
--R          +-----+ | 2      2
--R      2 | 2      2  \|- x  + a  + a      2      3
--R      - 3x \|- x  + a  log(-----) + 3a x  - a
--R                                  x
--R (2) -----
--R          +-----+
--R          5 2 | 2      2
--R      2a x \|- x  + a

```

--R Type: Expression Integer  
 --E

--S 119  
 cc:=aa-bb

--R  
 --R  

$$(3) \frac{3 \log\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} + a}{x}\right) + 3 \log\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} - a}{x}\right) + 2}{2a^5}$$
 --R Type: Expression Integer  
 --E

--S 120  
 dd:=expandLog cc

--R  
 --R  

$$(4) \frac{3 \log\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} + a}{x}\right) + 3 \log\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} - a}{x}\right) - 6 \log(x) + 2}{2a^5}$$
 --R Type: Expression Integer  
 --E

--S 121  
 ee:=complexNormalize dd

--R  
 --R  

$$(5) \frac{-3 \log\left(\frac{x}{\sqrt{-x^2 + a^2}}\right) + 1}{a^5}$$
 --R Type: Expression Integer  
 --E

--S 122 14:257 Schaums and Axiom differ by a constant  
 ff:=rootSimp ee

--R

```

--R      +---+
--R      3log(\|- 1 ) + 1
--R (6)  -----
--R           5
--R          a
--R
--E

```

Type: Expression Integer

22 [1]:14.258  $\int (a^2 - x^2)^{3/2} dx$

$$\int (a^2 - x^2)^{3/2} = \frac{x(a^2 - x^2)^{3/2}}{4} - \frac{3a^2x\sqrt{a^2 - x^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4 \ln(x + \sqrt{a^2 - x^2})$$

`<*>+≡  
)clear all`

`--S 123`

`aa:=integrate((a^2-x^2)^(3/2),x)`

`--R`

`--R`

`--R (1)`

```

--R
--R          +-----+
--R      5 2      7 | 2 2      4 4      6 2      8
--R      ((- 24a x + 48a )\|- x + a - 6a x + 48a x - 48a )
--R      *
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a - a
--R      atan(-----)
--R                      x
--R      +
--R          +-----+
--R      7      2 5      4 3      6 | 2 2      7      3 5      5 3
--R      (- 2x + 21a x - 56a x + 40a x)\|- x + a + 8a x - 44a x + 76a x
--R      +
--R      7
--R      - 40a x
--R      /
--R          +-----+
--R      2      3 | 2 2      4      2 2      4
--R      (32a x - 64a )\|- x + a + 8x - 64a x + 64a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

`--S 124`

`bb:=(x*(a^2-x^2)^(3/2))/4+(3*a^2*x*sqrt(a^2-x^2))/8+3/8*a^4*asin(x/a)`

`--R`

`--R`

```

--R          +-----+
--R      3      2 | 2 2      4      x
--R      (- 2x + 5a x)\|- x + a + 3a asin(-)
--R                                          a
--R      (2) -----
--R                      8

```

`--R`

Type: Expression Integer



--E

--S 125

cc:=aa-bb

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--E

$$(3) \frac{-6a \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} - a}{x}\right) - 3a \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}\right)}{8}$$

Type: Expression Integer

--S 126

asinrule:=rule(asin(x) == %i\*log(-%i\*x+sqrt(1-x^2)))

--R

--R

--R

--R

--R

--E

$$(4) \operatorname{asin}(x) == %i \log(\sqrt{-x^2 + 1} - %i x)$$

Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)

--S 127

ee:=asinrule cc

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--E

$$(5) \frac{-3%i a \log\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} - %i x}{a}\right) - 6a \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} - a}{x}\right)}{8}$$

Type: Expression Complex Integer

--S 128

atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2\*log((1+%i\*x)/(1-%i\*x)))

--R

--R

--R

--R

$$%i \log\left(\frac{-x + %i}{x + %i}\right)$$

```

--R (6) atan(x) == - -----
--R                                     2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 129
ff:=atanrule ee

```

```

--R (7)
--R      +-----+
--R      |  2  2
--R      |- x  + a
--R      a |----- - %i x
--R      |  2
--R      \ |  a
--R      4
--R      - 3%i a log(-----) + 3%i a log(-----)
--R                                     +-----+
--R                                     |  2  2
--R                                     - \ |- x  + a  + %i x + a
--R                                     +-----+
--R                                     |  2  2
--R                                     \ |- x  + a  + %i x - a
--R      -----
--R                                     8
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 130
gg:=expandLog ff

```

```

--R (8)
--R      +-----+
--R      |  2  2
--R      4  |- x  + a
--R      - 3%i a log(a |----- - %i x) - 3%i a log(\ |- x  + a  + %i x - a)
--R      |  2
--R      \ |  a
--R      +
--R      +-----+
--R      4  |  2  2
--R      3%i a log(\ |- x  + a  - %i x - a) + 3%i a log(a) + 3%i a log(- 1)
--R      /
--R      8
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 131
hh:=rootSimp gg
--R

```

```

--R (9)
--R
--R          +-----+
--R          4      | 2  2
--R      - 3%i a log(%i\|x - a + %i x - a) - 3%i a log(%i\|x - a - %i x)
--R      +
--R          +-----+
--R          4      | 2  2
--R      3%i a log(%i\|x - a - %i x - a) + 3%i a log(a) + 3%i a log(- 1)
--R /
--R      8
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 132      14:258 Schaums and Axiom agree

```

```

ii:=complexNormalize hh

```

```

--R
--R (10)  0
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

**23 [1]:14.259**  $\int x(a^2 - x^2)^{3/2} dx$

$$\int x(a^2 - x^2)^{3/2} = \frac{(a^2 - x^2)^{5/2}}{5}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 133
```

```
aa:=integrate(x*(a^2-x^2)^(3/2),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1)
```

```
--R
```

$$\frac{(5a^8x^8 - 30a^6x^6 + 60a^5x^4 - 40a^7x^2)\sqrt{-x^2+a^2} + x^{10} - 15a^2x^8 + 55a^4x^6 - 80a^6x^4 + 40a^8x^2}{(5x^4 - 60a^2x^2 + 80a^4)\sqrt{-x^2+a^2} - 25a^4x^4 + 100a^3x^2 - 80a^5}$$

```
--R /
```

```
--R
--R
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 134
```

```
bb:=- (a^2-x^2)^(5/2)/5
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

$$(2) \frac{(-x^4 + 2a^2x^2 - a^4)\sqrt{-x^2+a^2}}{5}$$

```
--R
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 135 14:259 Schaums and Axiom differ by a constant
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

24 [1]:14.260  $\int x^2(a^2 - x^2)^{3/2} dx$

$$\int x^2(a^2 - x^2)^{3/2} = \frac{x(a^2 - x^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2 x(a^2 - x^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4 x \sqrt{a^2 - x^2}}{16} + \frac{a^6}{16} \ln(x + \sqrt{a^2 - x^2})$$

(\*)+=  
)clear all

--S 136

aa:=integrate(x^2\*(a^2-x^2)^(3/2),x)

--R

--R

--R (1)

```

--R
--R              +-----+
--R              7 4      9 2      11 | 2 2      6 6      8 4
--R      (- 36a x  + 192a x  - 192a )\|- x  + a  - 6a x  + 108a x
--R      +
--R              10 2      12
--R      - 288a x  + 192a
--R      *
--R              +-----+
--R              | 2 2
--R              \|- x  + a  - a
--R      atan(-----)
--R              x
--R      +
--R              +-----+
--R              11      2 9      4 7      6 5      8 3      10 | 2 2
--R      (- 8x  + 158a x  - 639a x  + 982a x  - 592a x  + 96a x)\|- x  + a
--R      +
--R              11      3 9      5 7      7 5      9 3      11
--R      48a x  - 388a x  + 1062a x  - 1266a x  + 640a x  - 96a x
--R      /
--R              +-----+
--R              4      3 2      5 | 2 2      6      2 4      4 2
--R      (288a x  - 1536a x  + 1536a )\|- x  + a  + 48x  - 864a x  + 2304a x
--R      +
--R              6
--R      - 1536a

```

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 137

bb:=- (x\*(a^2-x^2)^(5/2))/6+(a^2\*x\*(a^2-x^2)^(3/2))/24+(a^4\*x\*sqrt(a^2-x^2))/16+a^6/16\*

--R

--R

+-----+

```

--R      5      2 3      4 | 2 2      6      x
--R      (- 8x + 14a x - 3a x)\|- x + a + 3a asin(-)
--R      a
--R      (2) -----
--R      48
--R
--R      Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 138
cc:=aa-bb
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      6      \|- x + a - a      6      x
--R      - 2a atan(-----) - a asin(-)
--R      x      a
--R      (3) -----
--R      16
--R
--R      Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 139
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R      - x + %i
--R      %i log(-----)
--R      x + %i
--R      (4) atan(x) == - -----
--R      2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 140
dd:=atanrule cc
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      6      - \|- x + a + %i x + a      6      x
--R      %i a log(-----) - a asin(-)
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- x + a + %i x - a
--R      (5) -----
--R      16
--R
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 141
asinrule:=rule(asin(x) == %i*log(-%i*x+sqrt(1-x^2)))
--R
--R
--R          +-----+
--R          |  2
--R (6) asin(x) == %i log(\|- x + 1 - %i x)
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 142
ee:=asinrule dd
--R
--R
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          \|- x + a
--R          a |----- - %i x
--R          |  2
--R          \|  a
--R          6
--R - %i a log(-----) + %i a log(-----)
--R          a
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          \|- x + a + %i x + a
--R          6
--R          - \|- x + a + %i x + a
--R          6
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          \|- x + a + %i x - a
--R (7) -----
--R
--R          16
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 143
ff:=expandLog ee
--R
--R (8)
--R
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          \|- x + a
--R          6
--R - %i a log(a |----- - %i x) - %i a log(\|- x + a + %i x - a)
--R          |  2
--R          \|  a
--R
--R +
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          \|- x + a
--R          6
--R          - %i x - a) + %i a log(a) + %i a log(- 1)
--R
--R /
--R          16
--R
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 144
gg:=rootSimp ff
--R
--R (9)
--R          +-----+
--R          6      | 2  2
--R      - %i a log(%i\|x  - a  + %i x - a) - %i a log(%i\|x  - a  - %i x)
--R      +
--R          +-----+
--R          6      | 2  2
--R      %i a log(%i\|x  - a  - %i x - a) + %i a log(a) + %i a log(- 1)
--R /
--R      16
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 145      14:260 Schaums and Axiom agree
hh:=complexNormalize gg
--R
--R (10)  0
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```



25 [1]:14.261  $\int x^3(a^2 - x^2)^{3/2} dx$

$$\int x^3(a^2 - x^2)^{3/2} = \frac{(a^2 - x^2)^{7/2}}{7} + \frac{a^2(a^2 - x^2)^{5/2}}{5}$$

(\*)+≡  
)clear all

--S 146

aa:=integrate(x^3\*(a^2-x^2)^(3/2),x)

--R

--R

--R (1)

$$\frac{(35a^{12}x^{12} - 336a^3x^{10} + 1015a^5x^8 - 1260a^7x^6 + 560a^9x^4)\sqrt{-x^2+a^2} + 5x^{14} - 133a^2x^{12} + 721a^4x^{10} - 1575a^6x^8 + 1540a^8x^6 - 560a^{10}x^4}{(35x^6 - 840a^2x^4 + 2800a^4x^2 - 2240a^6)\sqrt{-x^2+a^2} - 245a^6x^6 + 1960a^3x^4 - 3920a^5x^2 + 2240a^7}$$

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 147

bb:=(a^2-x^2)^(7/2)/7-(a^2\*(a^2-x^2)^(5/2))/5

--R

--R

$$(2) \frac{(-5x^6 + 8a^2x^4 - a^4x^2 - 2a^6)\sqrt{-x^2+a^2}}{35}$$

Type: Expression Integer

--E

--S 148 14:261 Schaums and Axiom differ by a constant

cc:=aa-bb

--R

--R

--R

$$(3) - \frac{2a^7}{---}$$

--R  
--R 35  
--E

Type: Expression Integer



```

--R
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2 2      | 2 2
--R      3  \|- x + a + a      3  \|- x + a - a      3
--R      3a log(-----) + 3a log(-----) + 4a
--R      x      x
--R (3) -----
--R      3
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 152

dd:=expandLog cc

```

--R
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2 2      | 2 2      3      3
--R      3  \|- x + a + a + 3a log(\|- x + a - a) - 6a log(x) + 4a
--R (4) -----
--R      3
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 153

ee:=complexNormalize dd

```

--R
--R      3      x      3
--R      - 6a log(-----) + 4a
--R      +-----+
--R      | 2
--R      \|- x
--R (5) -----
--R      3
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 154 14:262 Schaums and Axiom differ by a constant

ff:=rootSimp ee

```

--R
--R      3      +----+      3
--R      6a log(\|- 1 ) + 4a
--R (6) -----
--R      3
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```



```

--R
--R      | 2 2
--R      2  \|- x + a - a 2 x
--R      6a atan(-----) + 3a asin(-)
--R      x a
--R (3) -----
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 158
asinrule:=rule(asin(x) == %i*log(-%i*x+sqrt(1-x^2)))
--R
--R      +-----+
--R      | 2
--R (4) asin(x) == %i log(\|- x + 1 - %i x)
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 159
dd:=asinrule cc
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- x + a
--R      a |----- - %i x
--R      | 2
--R      \|- x + a
--R      3%i a log(-----) + 6a atan(-----)
--R      a x
--R (5) -----
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 160
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R      - x + %i
--R      %i log(-----)
--R      x + %i
--R (6) atan(x) == - -----
--R      2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 161

```

```

ee:=atanrule dd
--R
--R
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          |- x  + a
--R          a |-----+ - %i x
--R          |  2
--R          \|  a
--R          2
--R          3%i a log(-----) - 3%i a log(-----)
--R          a
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          - \|- x  + a  + %i x + a
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          \|- x  + a  + %i x - a
--R
--R (7) -----
--R
--R          2
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 162
ff:=expandLog ee
--R
--R (8)
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          |- x  + a
--R          2
--R          3%i a log(a |-----+ - %i x) + 3%i a log(\|- x  + a  + %i x - a)
--R          |  2
--R          \|  a
--R
--R +
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          - 3%i a log(\|- x  + a  - %i x - a) - 3%i a log(a) - 3%i a log(- 1)
--R
--R /
--R 2
--R
--R          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 163
gg:=rootSimp ff
--R
--R (9)
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          2
--R          3%i a log(%i\|x  - a  + %i x - a) + 3%i a log(%i\|x  - a  - %i x)
--R
--R +
--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          2
--R          2

```

```

--R      - 3%i a log(%i\|x - a - %i x - a) - 3%i a log(a) - 3%i a log(- 1)
--R /
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 164      14:263 Schaums and Axiom agree
hh:=complexNormalize gg

```

```

--R
--R      (10)  0
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```



**28 [1]:14.264**  $\int \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{x^3} dx$

$$\int \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{x^3} = -\frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{3}{2}a \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$$

```

(*)+=
)clear all

--S 165
aa:=integrate((a^2-x^2)^(3/2)/x^3,x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a
--R          +-----+
--R          4 3 2 | 2 2 2 4 4 2 \|- x + a - a
--R          ((- 3a x + 12a x )\|- x + a + 9a x - 12a x )log(-----)
--R
--R          +
--R          +-----+
--R          4 3 2 5 | 2 2 6 2 4 4 2 6
--R          (4a x + 3a x - 4a )\|- x + a + 2x - 3a x - 5a x + 4a
--R /
--R          +-----+
--R          4 2 2 | 2 2 4 3 2
--R          (2x - 8a x )\|- x + a - 6a x + 8a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 166
bb:=- (a^2-x^2)^(3/2)/(2*x^2)-(3*sqrt(a^2-x^2))/2+3/2*a*log((a+sqrt(a^2-x^2))/x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a
--R          +-----+
--R          2 2 | 2 2
--R          3a x log(-----) + (- 2x - a )\|- x + a
--R
--R          x
--R (2) -----
--R
--R          2
--R          2x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 167
cc:=aa-bb

```

```

--R
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2 2      | 2 2
--R      \|- x + a + a      \|- x + a - a
--R      - 3a log(-----) - 3a log(-----) - 2a
--R      x      x
--R (3) -----
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 168
dd:=expandLog cc
--R
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2 2      | 2 2
--R      - 3a log(\|- x + a + a) - 3a log(\|- x + a - a) + 6a log(x) - 2a
--R (4) -----
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 169
ee:=complexNormalize dd
--R
--R      x
--R (5) 3a log(-----) - a
--R      +-----+
--R      | 2
--R      \|- x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 170 14:264 Schaums and Axiom differ by a constant
ff:=rootSimp ee
--R
--R      +-----+
--R (6) - 3a log(\|- 1 ) - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

)spool
)lisp (bye)

```

## References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*  
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp68-69